

中学数学教师招聘专业知识模拟卷（三）

参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】A

【解析】由 $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{1+\sqrt{3}i} = \frac{-2(1+\sqrt{3}i)}{1+\sqrt{3}i} = -2$ 。故本题选 A。

2. 【答案】A

【解析】属于集合 A 且属于集合 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$ （或 $B \cap A$ ），故由定义可知 $A \cap B = \{0, 3\}$ 。故本题选 A。

3. 【答案】D

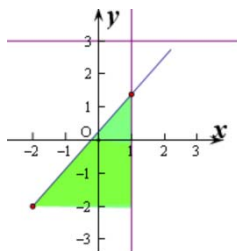
【解析】若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} < 0$ ，则不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 等价于 $a_2x^2 + b_2x + c_2 < 0$ ，则 $M \neq N$ ，即“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M = N$ ”的不充分条件；但当 $M = N = \emptyset$ 时，如 $x^2 + x + 1 < 0$ 和 $x^2 + x + 2 < 0$ ， $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 不成立，即“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M = N$ ”的不必要条件，故“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M = N$ ”的既不充分又不必要条件。故本题选 D。

4. 【答案】C

【解析】由 $x + y + z = 2 > 0$ ， $x > y > z$ 可知 $x > 0$ ，A 和 B 选项中 y, z 不能确定正负，则不能判断，故错误；C 选项根据 $y > z, x > 0$ 可得 $xy > xz$ ，故正确；D 选项，当 $y = 0$ 时， $x|y| = z|y|$ ，故错误。故本题选 C。

5. 【答案】D

【解析】直线 $\lambda x - y + 2\lambda - 2 = 0$ 等价于 $\lambda(x+2) - y - 2 = 0$ ，所以直线过定点 $(-2, -2)$ ，作出不等式对应的平面区域如图所示。要使不等式组表示的平面区域经过四个象限，则原点 O 必须在直线 $\lambda x - y + 2\lambda = 0$ 的下方，即当 $x = 0, y = 0$ 时，不等式 $\lambda x - y + 2\lambda - 2 > 0$ 成立，即 $2\lambda - 2 > 0$ ，解得 $\lambda > 1$ 。故本题选 D。



6. 【答案】D

【解析】 观察图像可知 $A=1, \frac{3}{4}T = \frac{11}{12}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $T=\pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 又因为函数过 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 则函数为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 将 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到的图像解析式为 $f(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。故本题选 D。

7. 【答案】A

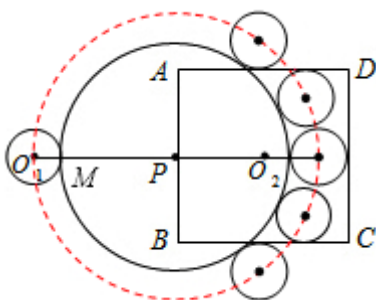
【解析】 函数 $y = \log_a(x^2 - ax + 2)$ 在 $[1, +\infty)$ 恒为正, 所以当 $a > 1$ 时, $y = \log_a(x^2 - ax + 2) > 0 = \log_a 1$, 即 $x^2 - ax + 2 > 1$ 恒成立, 即 $1 < a < 2$; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a(x^2 - ax + 2)$ 是单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 不恒为正, 不成立。综上 $1 < a < 2$ 。故本题选 A。

8. 【答案】B

【解析】 由已知可设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 , 当 $n=1$ 时, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{S_1}{T_1} = 1$, 所以 $a_1 = b_1$; 当 $n=2$ 时, $\frac{S_2}{T_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{2a_1 + d_1}{2a_1 + d_2} = \frac{6}{5}$, 即得 $5d_1 - 6d_2 = 2a_1$ ①; 当 $n=3$ 时, $\frac{S_3}{T_3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{a_1 + d_1}{a_1 + d_2} = \frac{4}{3}$, 即得 $3d_1 - 4d_2 = a_1$ ②; 联立①②可得 $a_1 = d_1, d_2 = \frac{1}{2}a_1$, 则 $\frac{a_{15}}{b_{15}} = \frac{a_1 + 14d_1}{b_1 + 14d_2} = \frac{15}{8}$ 。

9. 【答案】B

【解析】 $\because \square O_1$ 的半径为 1, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 点 O_2 为正方形 $ABCD$ 的中心, O_1O_2 垂直 AB 于 P 点, 设 O_1O_2 交圆 O_1 于 M , $\therefore PM = 8 - 3 - 1 = 4$, 圆 O_1 与以 P 为圆心, 以 4 为半径的圆相外切, $\therefore$ 有 5 次, 依次是 $\square O_1$ 在正方形 $ABCD$ 外, 与边 AD 相切, $\square O_1$ 在正方形 $ABCD$ 内, 与边 AD 相切, $\square O_1$ 在正方形 $ABCD$ 内, 与边 CD 相切, $\square O_1$ 在正方形 $ABCD$ 内, 与边 CD 相切, $\square O_1$ 在正方形 $ABCD$ 外, 与边 BC 相切。故本题选 B。



二、填空题

1. 【答案】 $4-2\sqrt{2}$

【解析】令 $x+2=s$, $y+1=t$, 那么 $x=s-2$, $y=t-1$, 因为 $xy=(s-2)(t-1) \geq 1$, 化简得 $s+2t \leq st+1$; $st=(x+2)(y+1)=xy+x+2y+2 \geq 1+2\sqrt{2xy}+2 \geq 3+2\sqrt{2}$; 所以, 原式 $=\frac{2}{s}+\frac{1}{t}=\frac{2t+s}{st} \leq \frac{st+1}{st}=1+\frac{1}{st} \leq 1+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=1+\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=4-2\sqrt{2}$, 故最大值是 $4-2\sqrt{2}$ 。

2. 【答案】 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$

【解析】由题意可知: $\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2+2x-1 \leq 4a^2x^2-4$, 即 $\frac{1}{a^2}-4a^2 \leq -\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$, 在 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上恒成立, 即 $\frac{1}{a^2}-4a^2 \leq \left(-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)_{\min}$, 令 $g(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$, 则 $g'(x)=\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^2}$, 又 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 有 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在区间内是单增函数, 则 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{3}$ 。 $\therefore \frac{1}{a^2}-4a^2 \leq -\frac{5}{3}$, 解不等式得: $a \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (舍) 或 $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

3. 【答案】 $(2018\sqrt{3}, 2020)$

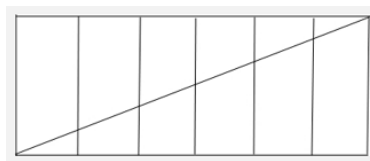
【解析】横坐标是以 0 为首项, $\sqrt{3}$ 为公差的等差数列, 所以横坐标为 $2018\sqrt{3}$; 纵坐标是以 2 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以横坐标为 2020。

4. 【答案】 $1-\frac{1}{4^n}$

【解析】根据题意可得, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}$, $\dots$, $\frac{3}{4^n} = \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^n}$,
 $\therefore \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{3}{4^n} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^n} = 1 - \frac{1}{4^n}$ 。

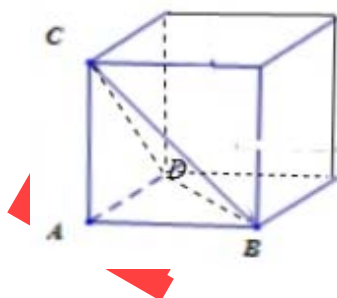
5. **【答案】** 13

【解析】将正三棱柱沿侧棱展开, 再拼接一次, 其展开图如下图所示, 在展开图中, 最短距离是六个矩形对角线的连线长度, 也即为三棱柱的侧面上所求的最小值。由已知求得矩形的长 $=6 \times 2 = 12$, 宽为 5; $d = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, 所以最短线路为 13cm。



6. **【答案】** 3π

【解析】设三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 ABC , 平面 ACD , 平面 ABD 两两互相垂直, $AB = AC = AD = 1$, 构造如下图所示的正方体, 可知该正方体的外接球就是三棱锥的外接球。正方体的对角线即为外接球的直径, 可得半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则表面积 $S = 4\pi r^2 = 3\pi$ 。



三、解答题 (一)

1. **【答案】** $\sqrt{2}$

【解析】原式 $= -1 + 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 。

2. **【答案】** $x = -4$

【解析】方程两边都乘以 $(x-3)(x+3)$, 得 $3 + x(x+3) = x^2 - 9$, 解得 $x = -4$ 。

检验: 把 $x = -4$ 代入 $(x-3)(x+3) \neq 0$, $\therefore x = -4$ 是原分式方程的解。

3. **【答案】** (1) 60 千米/时; (2) 70 千米/时; (3) 60 千米/时

【解析】(1) 这些车的平均速度是: $(40 \times 2 + 50 \times 3 + 60 \times 4 + 70 \times 5 + 80 \times 1) \div 15 = 60$ (千米/时); (2) 70 千米/时出现的次数最多, 则这些车的车速的众数 70 千米/时; (3) 共有 15 个,

最中间的数是第8个数，则中位数是60千米/时。

4. 【答案】 $AB = 20$, $BC = 20$

【解析】设 AB 的长度为 x ，则 BC 的长度为 $(100-4x)$ 米。根据题意得 $(100-4x) \cdot x = 400$ ，解得 $x_1 = 20$, $x_2 = 5$ 。则 $100-4x = 20$ 或 $100-4x = 80$ 。∵ $80 > 25$ ，∴ $x_2 = 5$ 舍去。即 $AB = 20$, $BC = 20$ 。答：羊圈的边长 AB , BC 分别是 20 米、20 米。

四、解答题（二）

1. 【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】(1) 由作图知： PQ 为线段 AC 的垂直平分线，∴ $AE = CE$, $AD = CD$ ，∵ $CF \parallel AB$ ，∴ $\angle EAC = \angle FCA$, $\angle CFD = \angle AED$ 。

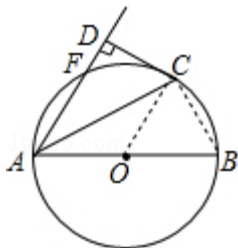
在 $\triangle AED$ 与 $\triangle CFD$ 中，
$$\begin{cases} \angle EAC = \angle FCA \\ AD = CD \\ \angle CFD = \angle AED \end{cases}, \therefore \triangle AED \cong \triangle CFD。$$

(2) ∵ $\triangle AED \cong \triangle CFD$ ，∴ $AE = CF$ ，∵ EF 为线段 AC 的垂直平分线，∴ $EC = EA$, $FC = FA$ ，∴ $EC = EA = FC = FA$ ，∴ 四边形 $AECF$ 为菱形。

2. 【答案】(1) 见解析；(2) 4

【解析】(1) 证明：连接 OC ，如图，∵ $FC = BC$ ，∴ $\angle FAC = \angle BAC$ ，∵ $OA = OC$ ，∴ $\angle OAC = \angle OCA$ ，∴ $\angle FAC = \angle OCA$ ，∴ $OC \parallel AF$ ，∵ $CD \perp AF$ ，∴ $OC \perp CD$ ，∴ CD 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 连结 BC ，如图，∵ AB 为直径，∴ $\angle ACB = 90^\circ$ ，∵ $AF = FC = CB$ ，∴ $\angle BOC = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ，∴ $\angle BAC = 30^\circ$ ，∴ $\angle DAC = 30^\circ$ ，在 $Rt\triangle ADC$ 中， $CD = 2\sqrt{3}$ ，∴ $AC = 2CD = 4\sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle ACB$ 中， $BC = \frac{\sqrt{3}}{3} AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 4\sqrt{3} = 4$ ，∴ $AB = 2BC = 8$ ，∴ $\odot O$ 的半径为 4。



3. 【答案】(1) 420 千米；(2) $y_2 = 30x - 60$ ；(3) $\frac{14}{3}$

【解析】(1) A, B 两地相距 420 千米;

(2) 由图可知货车的速度为 $60 \div 2 = 30$ 千米/小时, 货车到达 A 地一共需要

$2 + 360 \div 30 = 14$ 小时, 设 $y_2 = kx + b$, 代入点 $(2, 0)$ 、 $(14, 360)$ 得 $\begin{cases} 2k + b = 0 \\ 14k + b = 360 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = 30 \\ b = -60 \end{cases}$,

所以 $y_2 = 30x - 60$;

(3) 设 $y_1 = mx + n$, 代入点 $(6, 0)$ 、 $(0, 360)$, 得 $\begin{cases} 6m + n = 0 \\ n = 360 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = -60 \\ n = 360 \end{cases}$, 所以

$y_1 = -60x + 360$, 由 $y_1 = y_2$, 得 $30x - 60 = -60x + 360$, 解得 $x = \frac{14}{3}$, 故客、货两车经过 $\frac{14}{3}$ 小时相遇。

4. 【答案】(1) $A(6, 0)$, $B(0, 8)$; (2) $\frac{84}{5}$; (3) $(\frac{18}{13}, \frac{80}{13})$

【解析】(1) 令 $y=0$, 则 $-\frac{4}{3}x + 8 = 0$, 解得 $x=6$; $x=0$ 时, $y=8$, $\therefore OA=6$, $OB=8$, $\therefore$ 点 $A(6, 0)$, $B(0, 8)$;

(2) 在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理得, $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $\therefore$ 点 P 的速度是每秒 2 个单位, 点 Q 的速度是每秒 1 个单位, $\therefore AP = 2t$, $AQ = AB - BQ = 10 - t$, $\therefore$ 点 Q 到 AP 的距离为 $AQ \cdot \sin \angle OAB = (10 - t) \times \frac{8}{10} = \frac{4}{5}(10 - t)$, $\therefore \triangle AQP$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 2t \times \frac{4}{5}(10 - t)$, 化简得 $-\frac{4}{5}(t - 5)^2 + 20$, $\therefore -\frac{4}{5} < 0$, $0 < t \leq 3$, $\therefore$ 当 $t=3$ 时, $\triangle AQP$ 的面积最大, $S_{\text{最大}} = -\frac{4}{5}(3 - 5)^2 + 20 = \frac{84}{5}$ 。

(3) 若 $\angle APQ = 90^\circ$, 则 $\cos \angle OAB = \frac{AP}{AQ} \therefore \frac{2t}{10 - t} = \frac{6}{10}$, 解得 $t = \frac{30}{13}$, 若 $\angle AQP = 90^\circ$, 则 $\cos \angle OAB = \frac{AQ}{AP}$, $\therefore \frac{10 - t}{2t} = \frac{6}{10}$, 解得 $t = \frac{50}{11}$, $\therefore 0 < t \leq 3$, $\therefore t$ 的值为 $\frac{30}{13}$, 此时, $OP = 6 - 2 \times \frac{30}{13} = \frac{18}{13}$, $PQ = AP \cdot \tan \angle OAB = (2 \times \frac{30}{13}) \times \frac{8}{6} = \frac{80}{13}$, $\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(\frac{18}{13}, \frac{80}{13})$ 。综上所述, $t = \frac{30}{13}$ 秒时, 以点 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABO$ 相似, 此时点 Q 的坐标为 $(\frac{18}{13}, \frac{80}{13})$ 。