中学数学教师招聘专业知识模拟卷（一）

参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C

【解析】由复数模的定义可知$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，故本题选 C。

2.【答案】B

【解析】集合$A=\{x|x^2<1\}$，即$A=\{x|-1<x<1\}$；集合$B=\{x|2^x<1\}$，即$B=\{x|x<0\}$，故$A\cap B=\{x|-1<x<0\}$；$A\cup B=\{x|-\infty<x<1\}$。故本题选 B。

3.【答案】B

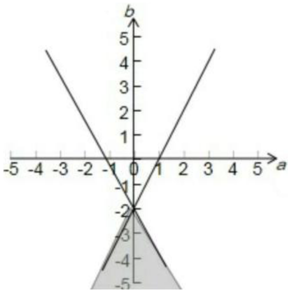
【解析】A 选项中$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$成立的前提条件是$a\geq 0$，当$a<0$时$\sqrt{a}$无意义，故 A 错误；B 选项中有理数包括正有理数、0 和负有理数，故 B 正确；C 选项中所有等边三角形都相似而不是全等，故 C 错误；D 选项中圆锥的主视图一定是等腰三角形，当且仅当母线长与底面直径相等时才会是等边三角形，故 D 错误。故本题选 B。

4.【答案】C

【解析】设$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}-\log_{\frac{1}{2}}x$，则$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{\frac{1}{4}+2}-1=-\dfrac{1}{9}<0$，$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\frac{1}{2}+1}-\dfrac{1}{2}>0$，所以$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}-\log_{\frac{1}{2}}x$的零点所在区间为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$。故本题选 C。

5.【答案】D

【解析】因为方程$x^2+\sqrt{2}ax+b=0(a，b\in\mathbf{R})$的两个根在$(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$上，所以$\begin{cases}2-2a+b\leq 0\\2+2a+b\leq 0\end{cases}$，满足条件的可行域如图所示：



a^2+b^2 表示可行域内点 $(a,\ b)$ 到原点距离的平方和，故当 $a=0,\ b=-2$ 时，有最小值 $\left(a^2+b^2\right)_{\min}=4$。故本题选 D。

6.【答案】B

【解析】令 $g(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$；$h(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，则 $g(-x)=\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\right)=-\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=-g(x)$，即 $h(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^x+1}=-h(x)$，$f(-a)=$

$f(-a)=g(-a)+h(-a)=-\left[g(a)+h(a)\right]=-f(a)=-1$。故本题选 B。

7.【答案】C

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，且 $A(-1,-2)$，$B(4,-2)$ 是其图像上两点，则 $B(4,-2)$ 关于原点对称的点 $C(-4,2)$ 也在函数 $f(x)$ 的图像上，$A(-1,-2)$ 关于原点对称的点 $D(1,2)$ 也在函数 $f(x)$ 上，那么不等式 $|f(x+3)|<2$ 等价于 $-2<f(x+3)<2$，所以 $\begin{cases}-4<x+3<-1\\1<x+3<4\\x+3=0\end{cases}$，解得 $\{x\,|\,-7<x<-4\text{或}-2<x<1\text{或}x=-3\}$。故本题选 C。

8.【答案】B

【解析】x 是 $a,\ b$ 的等差中项，所以 $2x=a+b$，y 是 $b,\ c$ 的等差中项，所以 $2y=b+c$，$a,\ b,\ c$ 成等比数列，所以 $b^2=ac$，则有

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=\dfrac{a}{\frac{a+b}{2}}+\dfrac{c}{\frac{b+c}{2}}=\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2c}{b+c}=\dfrac{2a(b+c)+2c(a+b)}{(a+b)(b+c)}=\dfrac{2\left(ab+ac+b^2+bc\right)}{ab+ac+b^2+bc}=2$。故本题选 B。

9.【答案】C

【解析】边长为 2 的正三角形的高为 $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，则侧视图的底边长为 $\sqrt{3}$，又侧视图的高等于正视图的高 2，故所求面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2=\sqrt{3}$。故本题选 C。

10.【答案】B

【解析】设直线 l 的斜率为 k，A、B 两点的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。根据题目中 A、B 两点在双曲线 C 上，则满足 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，得到 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}=\frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}=3\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$ ①。又因为 A、B 的中点 M 可设为 (x_0, y_0)，在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，所以可得 $y_0^2=2px_0$，根据直线 l 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在 M 点相切，可得在 M 点的斜率 $y'=\sqrt{2p}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{y_0}{\sqrt{x_0}}\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{y_0}{2x_0}$ ②。将①和②式联立，根据斜率相等可得：$\frac{3x_0}{y_0}=\frac{y_0}{2x_0}$，则 $\frac{y_0}{x_0}=\sqrt{6}$，$\therefore k=\frac{\sqrt{6}}{2}$。故本题选 B。

二、填空题

1.【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】根据题意 $\frac{2x+y}{x}=2+\frac{y}{x}$，要求 $\frac{2x+y}{x}$ 的最大值，即求 $\frac{y}{x}$ 的最大值，又由题意可知 $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{x}\le-\frac{1}{9}$，$\therefore \left(\frac{y}{x}\right)_{max}=y_{min}\left(\frac{1}{x}\right)_{min}=3\times\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{3}$ 时，$\left(\frac{2x+y}{x}\right)_{max}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$。

2.【答案】①②③

【解析】(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-|x|}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}e^{-|x|}=1$，故当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取最大值，即 $f(x)_{max}=1+1=2$，故正确。(2) 函数 $f(x)=e^{-|x|}+\cos\pi x$，满足 $f(-x)=f(x)$，故函数为偶函数，其零点关于原点对称，故 $f(x)$ 在 $(-2017,2017)$ 内的零点之和为 0，故正确。(3) 当 $\cos\pi x$ 取极大值 1 时，函数 $f(x)=e^{-|x|}+\cos\pi x$ 取极大值，但均大于 1，故正确。

3.【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】若方程 $x^2+px+1=0$ 有实根，则 $\Delta=p^2-4\geq0$，解得 $p\geq2或p\leq-2$；∵记事件 A：“p 在[0，5]上随机地取值，关于 x 的方程 $x^2+px+1=0$ 有实根”，由方程 $x^2+px+1=0$ 有实根符合几何概型，∴ $P(A)=\frac{5-2}{5}=\frac{3}{5}$。

4.【答案】$a>0$（或 $a\geq0$）

【解析】因为所有负数项的和最小，所以当 $a>0$ 时，前 n 项和最小，故答案为 $a>0$。

5.【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】画出满足条件的平面区域，$\frac{y}{x}$ 的几何意义是阴影内的点 (x, y) 与原点的连线的斜率，结合图象可知，过点 $A\left(\frac{4}{3},2\right)$ 时有最大值，此时 $\frac{y}{x}=\frac{2-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{3}{2}$。

三、解答题

1.【答案】(1) $\frac{1}{2}$；(2) $\left(\frac{17\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$

【解析】(1) $f(x)=\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$。

(2) 令 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，得 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$，令 $k=1$，得 $x=\frac{17\pi}{12}$，所以 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧第二个最高点的坐标是 $\left(\frac{17\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$。

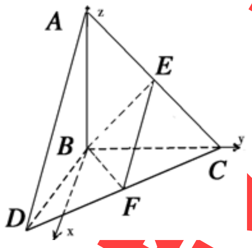
2.【答案】(1) 见解析；(2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【解析】(1) 因为 $BC=4$，$AC=4\sqrt{2}$，$\angle ACB=45°$，则 $AB=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2-2\cdot4\cdot4\sqrt{2}\cos45°}=4$，显然，$AC^2=AB^2+BC^2$，所以 $\angle ABC=90°$，即 $AB\perp BC$。又平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AB\perp$ 平面 BCD，又 $AB\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 BCD。

(Ⅱ) 由 $BC=BD$，F 分别为 DC 的中点，则 $BF\perp DC$，由 CD=$4\sqrt{3}$，知 $CF=2\sqrt{3}$，知 $\sin\angle FBC=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle FBC=60°$，则 $\angle DBC=120°$。如图，以点 B 为坐标原点，以平

面 DBC 内与 BC 垂直的直线为 x 轴，以 BC 为 y 轴，以 BA 为 z 轴建立空间坐标系；则 $B(0,0,0)$，$A(0,0,4)$，$C(0,4,0)$，$E(0,2,2)$，$D(2\sqrt{3},-2,0)$，$F(\sqrt{3},1,0)$，

所以 $\overrightarrow{BE}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{BF}=(\sqrt{3},1,0)$。显然平面 CBF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$，设平面 EBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,\ y,\ z)$ 由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得其中一个 $\boldsymbol{n}_2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,1\right)$，设二面角 $E-BF-C$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\left|\cos\langle\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$。因此 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，即二面角 $E-BF-C$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$。



3.【答案】(1) $\dfrac{10}{81}$；(2) $\dfrac{5}{3}$

【解析】(1) 基本事件的总数为 3^5 个，“地点 A 空降 1 人，地点 B、C 各空降 2 人”包含的基本事件为 $C_5^1C_4^2$，所以所求事件的概率为：$P=\dfrac{C_5^1C_4^2}{3^5}=\dfrac{10}{81}$；

(2) 由题意知随机变量 $\xi\sim B(5,\dfrac{1}{3})$，∴随机变量 ξ 的所有可能取值为 0,1,2,3,4,5

$P(\xi=0)=C_5^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{32}{243}$，$P(\xi=1)=C_5^1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{80}{243}$，

$P(\xi=2)=C_5^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{80}{243}$，$P(\xi=3)=C_5^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{40}{243}$

$P(\xi=4)=C_5^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{10}{243}$，$P(\xi=5)=C_5^5\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{1}{243}$

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{32}{243}$	$\dfrac{80}{243}$	$\dfrac{80}{243}$	$\dfrac{40}{243}$	$\dfrac{10}{243}$	$\dfrac{1}{243}$

所以随机变量 ξ 的分布列为:根据二项分布得数学期望 $E(\xi)=5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$。

4.【答案】（1） $b_n=3n-2$；（2） $T_n=\frac{28}{3}+(3n-2)2^{n+1}+\frac{2}{3}(-2)^n$

【解析】(1) 当 $n>1$ 时，$b_n=B_n-B_{n-1}=\frac{3n^2-n}{2}-\frac{3(n-1)^2-(n-1)}{2}=3n-2$，令 $n=1$，得 $b_1=1$，$\therefore b_n=3n-2$

（2）由题意知 $a_n=\left[b_n+(-1)^n\right]\cdot 2^n=b_n\cdot 2^n+(-1)^n2^n$ 记 $\left\{b_n\cdot 2^n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\left\{(-)^n2^n\right\}$ 的前 n 项和为 H_n 因为 $b_n\cdot 2^n=(3n-2)2^n$，所以 $S_n=(3\times 1-2)2+(3\times 2-2)\cdot 2^2+\cdots+(3n-2)\cdot 2^n$，$2S_n=(3\times 1-2)2^2+(3\times 2-2)\cdot 2^3+\cdots+(3(n-1)-2)2^n+(3n-2)\cdot 2^{n+1}$，两式相减得 $-S_n=$ $2+3(2^2+2^3+\cdots+2^n)$ $-(3n-2)\cdot 2^{n+1}=-10+(5-3n)2^{n+1}$，所以 $S_n=10+(3n-5)2^{n+1}$，又 $H_n=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n$，所以 $T_n=S_n+H_n=10+(3n-2)2^{n+1}+\frac{2}{3}(-2)^n-\frac{2}{3}=\frac{28}{3}+(3n-2)2^{n+1}+\frac{2}{3}(-2)^n$。

5.【答案】（1） $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；（2） $\lambda=-\frac{1}{2}$

【解析】(1) $\because e=\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}, \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}, \therefore a^2=4b^2$，设直线与椭圆交于 P，Q 两点。不妨设 P 点为直线和椭圆在第一象限的交点，又 $\because$ 弦长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$，$\therefore P\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\therefore$ $\frac{\frac{4}{5}}{a^2}+\frac{\frac{4}{5}}{b^2}=1$，可得 $a^2+b^2=\frac{5}{4}a^2b^2$，解得 $a^2=4$，$b^2=1$，$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$。

（2）(i) 设 $A(x_1, y_1)(x_1y_1\neq 0)$，$D(x_2, y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1}{x_1}$，又 $AB\perp AD$，故直线 AD 的斜率 $k=\frac{x_1}{y_1}$，设直线 AD 的方程为 $y=kx+m$，由题意知 $k\neq 0$，$m\neq 0$。由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 可得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8mkx+4m^2-4=0$。所以 $x_1+x_2=-\frac{8mk}{1+4k^2}$，因 $y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2m=\frac{2m}{1+4k^2}$。由题意知 $x_1\neq -x_2$，所以 $k_1=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{4k}=\frac{y_1}{4x_1}$，所以直线 BD 的方程为 $y+y_1=\frac{y_1}{4x_1}\left(x+x_1\right)$。令 $y=0$，得 $x=3x_1$，即 $M\left(3x_1, 0\right)$，可得 $k_2=-\frac{y_1}{2x_1}$，所以 $k_1=-\frac{1}{2}k_2$，即 $\lambda=-\frac{1}{2}$。因此存在常数 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 使得结论成立。

6.【答案】（1）见解析；（2）见解析

【解析】（1）函数 $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x>0\right\}$。令 $f(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，故 $f(x)$ 的零

点为e。$f'(x)=\dfrac{(-\frac{1}{x})\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$（$x>0$）。令 $f'(x)=0$，解得 $x=e^{\frac{3}{2}}$。

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

$f(x)$	$(0,e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\ e^{\frac{3}{2}})$，单调递增区间为 $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$。

（2）令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=f(x)$。

因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4+4\ln 2>4+4\times\dfrac{1}{2}=6$，$f(e)=0$，且由（Ⅰ）得，$f(x)$ 在 $(0,\ e)$ 内是减函数，所以存在唯一的 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\ e\right)$，使得 $g'(x_0)=f(x_0)=6$。当 $x\in[e,+\infty)$ 时，$f(x)\le 0$，所以曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 存在以 $(x_0,g(x_0))$ 为切点，斜率为 6 的切线。由 $g'(x_0)=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}=6$ 得：$\ln x_0=1-6x_0^2$，所以 $g(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1-6x_0^2}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-6x_0$。因为 $x_0>\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{x_0}<2$，$-6x_0<-3$，则 $y_0=g(x_0)<-1$。