中学数学教师招聘专业知识模拟卷（二）

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】B

【解析】因为 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2=2$。故本题选 B。

2.【答案】A

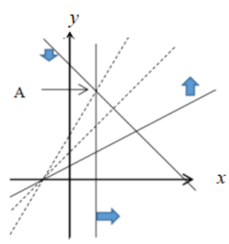
【解析】$\because A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$，故 B 中的每一个元素在 A 中一定能找到相同的元素，假如 $-a=a\Rightarrow a=0$，不符合题意；若 $-a=2\Rightarrow a=-2$，则 $A=\{4,-2,2\}$，$B=\{3,2\}$，不符合题意；若 $-a=a^2\Rightarrow a=-1$ 或 0（舍去），当 $a=-1$ 时，$A=\{1,-1,2\}$，$B=\{1,2\}$，符合题意，此时 $2^a=2^{-1}=0.5$。故本题选 A。

3.【答案】B

【解析】命题甲：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$（舍去）或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$。命题乙：$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，因此乙 $\Rightarrow$ 甲，但甲 $\not\Rightarrow$ 乙。故甲是乙的必要条件但不是充分条件。故本题选 B。

4.【答案】C

【解析】由约束条件可得作用区域如下图：



因为目标函数 $z=\dfrac{y}{x+1}$，变形为 $y=z(x+1)$，可知 z 的几何意义是过定点 $(-1,0)$ 的直线的斜率，故由图易知目标函数 $z=\dfrac{y}{x+1}$ 在点 $A(1,\ m-1)$ 处取得最大值 1，$\therefore z=\dfrac{m-1}{1+1}=1$，解得 $m=3$。故本题选 C。

5.【答案】B

【解析】$\because b^2+c^2=2$，$c^2+a^2=2$，$\therefore b^2+c^2=c^2+a^2$，$\therefore b^2=a^2$，又 $a^2+b^2=1$，所以当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$(ab+bc+ca)$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$。故本题选 B。

6.【答案】A

【解析】$f(x)=2\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-1=-\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(2\omega x)$，又对称中心与最近对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$，即 $\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{4}$，所以 $\omega=1$，则 $f(x)=\sin 2x$，三角函数伸缩平移，向左平移，左加右减，$g(x)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$。故本题选 A。

7.【答案】B

【解析】由图像可知，函数与横坐标轴无交点，即无根，故①错；当 $x=1$ 时，有 $1+b+c=1$，故②错；当 $x=3$ 时，整理即得 $3b+c+6=0$，故③正确；当 $1<x<3$ 时，直线在二次函数上方，故④正确，综上选 B。故本题选 B。

8.【答案】A

【解析】由 $e=\frac{c}{a}=2$ 得公比 $c=2a$ 即 $F_1F_2=2c=4a$；$C_{\triangle AF_1F_2}=AF_2+AF_1+F_1F_2=10a$ 解得 $AF_2+AF_1=6a$；假设点 A 在双曲线的左支上，由双曲线第一定义得 $AF_2-AF_1=2a$，联立解得 $AF_2=4a$；$AF_1=2a$，$\triangle AF_1F_2$ 为等腰三角形其高为 $\sqrt{15}a$，$\triangle AF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{2a\cdot\sqrt{15}a}{2}=\sqrt{15}a^2$。故本题选 A。

9.【答案】C

【解析】由于函数在 $x=2$ 处连续，根据函数极限的连续定理可知，$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)$，由 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{3x+2}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x+2-2x-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)=a$，则 $a=\frac{1}{4}$。故本题选 C。

10.【答案】C

【解析】A 选项，由矩阵乘法的性质可知，方阵没有交换律，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，A 选项不满条件；B 选项，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$，由于 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，即 B 选项也不满足条件；C 选项，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$（$\boldsymbol{A}$ 可逆），

矩阵方程两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，即 C 选项满足条件；D 选项，若有两个矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 的结论，即 D 选项不满足条件。故本题选 C。

二、填空题

1.【答案】$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

【解析】根据题意可得，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=2$，\ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$。

\ $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{2a}$? $\frac{3}{2}$ $2\sqrt{\frac{a}{b}?\frac{b}{2a}}$ $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $b=\sqrt{2}a$ 时，“=”成立，故本题答案为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$。

2.【答案】$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【解析】由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=3$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\alpha=-1$。$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，又因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{7},|\boldsymbol{a}|=1$，解得 $\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$。

3.【答案】6

【解析】设正方形 $ABCD$ 的边长为 x，将正方形纸片 $ABCD$ 分别沿 AE、AF 折叠，可知 $BE=EG=2$，则 $EC=x-2$；$DF=FG=3$，则 $FC=x-3$；在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中，$EF=EG+FG=5$，根据勾股定理得：$EC^2+FC^2=EF^2$，即 $(x-2)^2+(x-3)^2=5^2$，则 $x=6$。$\therefore$ 正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 6。

4.【答案】等边三角形

【解析】方程化为 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$，即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，也即 $a=b=c$，所以三角形是等边三角形。

5.【答案】$\frac{10^x}{\ln x}-3\cos x-\ln|x|+C$

【解析】根据不定积分的性质分开求各自的积分可得原式=$\frac{10^x}{\ln x}-3\cos x-\ln|x|+C$。

6.【答案】2

【解析】点 $M(1,2)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，所以 $p=2$，所以抛物线为 $y^2=4x$，又 $y^2=4x$ 的焦点到其准线的距离为 2。双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的焦点 $(c,0)$ 到其渐近线 $x+\frac{y}{b}=0$ 的距离：

$\frac{c}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}}=b$，由题意可知 $b=2$。

7.【答案】60 种

【解析】先选 4 人的选法为 $C_5^4=5$ 种，安排周五人员有 $C_4^2=6$ 种，安排星期六、星期日有 $A_2^2=2$ 种，所以 $5\times6\times2=60$ 种。

8.【答案】64 元

【解析】根据题意可得：降价后的价格为 100×(1－20%)×(1－20%)=64 元。

9.【答案】1

【解析】曲线 $y'=6x-6$，所以令 $6x-6=6$，$x=2$。则切点为(2,13)，带入直线方程解得 $k=1$。

10.【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】原式=$\int_1^{e}(1+\ln x)\frac{1}{x}dx=\int_1^{e}(1+\ln x)d(1+\ln x)=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\Big|_1^{e}=\frac{3}{2}$。

三、解答题

1.【答案】（1）$C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，$C_2:x^2+y^2=2$；（2）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】（1）由椭圆的焦点在 x 轴上，则 $a=2$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $c=\sqrt{2}$，$b^2=2$，所以椭圆的标准方程为：$C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；由已知 $r=\sqrt{|PO|^2-|PT|^2}=\sqrt{2}$，则圆 C_2 的方程为：$x^2+y^2=2$。

（2）设直线 l_1 的斜率存在，其方程为：$y=k\left(x+2\right)$，则 $\begin{cases}y=k\left(x+2\right)\\x^2+2y^2=4\end{cases}$，整理可得：

$\left(1+2k^2\right)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$，则有：$x_P+x_D=-\frac{8k^2}{1+2k^2}$，由 $x_P=-2$，则 $x_D=\frac{2-4k^2}{1+2k^2}$；

则有 $|DP|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_D|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}$，直线 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{k}\left(x+2\right)$，即 $x+ky+2=0$，那么 $|AB|=2\sqrt{2-\left(\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{2k^2-2}{1+k^2}}$，则

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PD|=\frac{4\sqrt{2k^2-2}}{2k^2+1}=\frac{4\sqrt{2k^2-2}}{2k^2-2+3}=\frac{4}{\sqrt{2k^2-2}+\frac{3}{\sqrt{2k^2-2}}}\le\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$，当且

仅当 $\sqrt{2k^2-2}=\dfrac{3}{\sqrt{2k^2-2}}$，即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 时取等号；$\therefore\triangle ABD$ 面积的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。

2.【答案】$\dfrac{9}{2}$

【解析】根据曲线所围成的图形可知，面积为

$$A=\int_0^3(x+3)-(x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\int_0^3(-x^2+3x)\mathrm{d}x=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2)\Big|_0^3=\frac{9}{2}。$$

3.【答案】（1）$\omega=1$，$\varphi=\dfrac{\pi}{24}$；（2）增区间为 $\left[-\dfrac{13\pi}{24}+k\pi,-\dfrac{\pi}{24}+k\pi\right]$；（3）最小值 $-\dfrac{1}{4}$，最大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

【解析】（1）$f(x)=\cos^2(\omega x+\varphi)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}[1+\cos(2\omega x+2\varphi)]-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos(2\omega x+2\varphi)$，因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，根据周期公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 可得：$\pi=\dfrac{2\pi}{2\omega}$，所以 $\omega=1$，则 $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos(2x+2\varphi)$，又因为 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{4}$，代入上式可得：$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\varphi\right)$，因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以解得：$\varphi=\dfrac{\pi}{24}$；

（2）由第（1）问可知：$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$，当 $-\pi+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{12}\le 2k\pi$ 时，解得：$-\dfrac{13\pi}{24}+k\pi\le x\le-\dfrac{\pi}{24}+k\pi$，所以 $f(x)$ 的增区间为 $\left[-\dfrac{13\pi}{24}+k\pi,-\dfrac{\pi}{24}+k\pi\right]$；

（3）当 $\dfrac{\pi}{24}\le x\le\dfrac{7\pi}{24}$ 时，$\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{12}\le\dfrac{2\pi}{3}$，则根据余弦函数的单调性可知，当 $2x+\dfrac{\pi}{12}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，所以当 $2x+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，当 $2x+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值为 $-\dfrac{1}{4}$。

4.【答案】（1）$a_n=n+1$，$b_n=2^n$；（2）$G_n=n\cdot 2^{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

【解析】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$；当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n+1$；经验证，$n=1$ 满足 $a_n=n+1$，因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$。

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，首项为 b_1，依题意可知 $\begin{cases}b_1q^2=8\\ \dfrac{b_1(1-q^2)}{1-q}=6\end{cases}\Rightarrow q=2$ 或 $q=-\dfrac{2}{3}$（舍），

所以 $b_n=b_2\times 2^{n-2}=2^n$。

（2）由（1）可知$c_n=a_n\cdot b_n=(n+1)\cdot 2^n$，则

$G_n=2\times 2^1+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times 2^{n-1}+(n+1)\times 2^n$ ①

$2G_n=2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+\cdots+n\times 2^n+(n+1)\times 2^{n+1}$ ②

①－②得：$-G_n=2\times 2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-(n+1)\times 2^{n+1}$

即$-G_n=4+\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\times 2^{n+1}=-n\cdot 2^{n+1}$，所以$G_n=n\cdot 2^{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

四、应用题

1.【答案】（1）$y=-20x^2+40x+700$；（2）5 元；（3）每千克降价 1 元时，每天的盈利最多 720，最多盈利 720 元。

【解析】（1）根据题意得：$y=(100+20x)\times(7-x)=-20x^2+40x+700$

（2）令$y=-20x^2+40x+700=400$，整理化简有：$x^2-2x-15=0$，解得：$x_1=-3$（舍），$x_2=5$，所以若要平均每天盈利 400 元，则每千克应降价 5 元。

（3）$y=-20x^2+40x+700=400=-20(x-1)^2+720$，所以每千克降价 1 元时，每天的盈利最多，最多盈利 720 元。

2.【答案】（1）分布列见解析；（2）$\dfrac{24}{5}$。

【解析】由题意可知，随机变量X的取值为 3，4，5，6，7，所以有$P(X=3)=\dfrac{2}{C_5^2}=\dfrac{1}{5}$；$P(X=4)=\dfrac{2}{C_5^2}=\dfrac{1}{5}$；$P(X=5)=\dfrac{3}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$；$P(X=6)=\dfrac{2}{C_5^2}=\dfrac{1}{5}$；$P(X=7)=\dfrac{1}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$，所以$X$的分布列为下表：

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

（2）X的数学期望$E(X)=3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{3}{10}+6\times\dfrac{1}{5}+7\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{24}{5}$。