

函数的图象变换

函数的图象变换是招教数学笔试考试中的重要内容之一，这部分题目难度适中，而又自带陷阱，函数图象变换曾令很多人苦不堪言。其实这部分内容的技巧性和灵活性较强，本文将对函数图象变换进行归纳总结，带领大家体会函数图象变化的奥妙，理解并掌握函数图象变换之精髓！

一、平移变换

(1) 水平变换：函数 $y = f(x+a)$ 的图象可以把函数 $y = f(x)$ 的图象沿 x 轴方向向左 ($a > 0$) 或向右 ($a < 0$) 平移 $|a|$ 个单位即可得到：

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{左移}a} y = f(x+a)$$

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{右移}a} y = f(x-a)$$

(2) 竖直变换：函数 $y = f(x) + a$ 的图象可以把函数 $y = f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上 ($a > 0$) 或向下 ($a < 0$) 平移 $|a|$ 个单位即可得到：

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{上移}a} y = f(x) + a$$

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{下移}a} y = f(x) - a$$

总结：左加右减，上加下减。

二、对称变换

(1) 函数 $y = f(-x)$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象 y 轴对称即可得到：

$$y = f(x) \xrightarrow{y\text{轴}} y = f(-x)$$

(2) 函数 $y = f(2a-x)$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象 $x = a$ 轴对称即可得到：

$$y = f(x) \xrightarrow{x=a} y = f(2a-x)$$

(3) 函数 $y = -f(x)$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象 x 轴对称即可得到：

$$y = f(x) \xrightarrow{x\text{轴}} y = -f(x)$$

(4) 函数 $y = 2b - f(x)$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象 $y = b$ 轴对称即可得到：

$$y = f(x) \xrightarrow{y=b} y = 2b - f(x)$$

(5) 函数 $y = 2b - f(2a - x)$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称即可得到:

$$y = f(x) \xrightarrow{(a, b)\text{点对称}} y = 2b - f(2a - x)$$

三、翻转变换

(1) 函数 $y = |f(x)|$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象的 x 轴下方部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方, 去掉原 x 轴下方部分即可得到:

$$y = f(x) \xrightarrow{x\text{轴翻折}} y = |f(x)|$$

(2) 函数 $y = f(|x|)$ 的图象可以将函数 $y = f(x)$ 的图象的 y 轴右边部分沿 y 轴翻折到 y 轴左边, 并保留原 y 轴右边部分即可得到:

$$y = f(x) \xrightarrow{y\text{轴翻折}} y = f(|x|)$$

【例题】

1. 将 $y = x^2 + 1$ 的图象向左移动 1 个单位, 向下移动 4 个单位 ()

A. $y = (x-1)^2 + 3$

B. $y = (x+1)^2 + 3$

C. $y = (x-1)^2 - 3$

D. $y = (x+1)^2 - 3$

【答案】选 D。

【解析】平移后的图象为 $y = (x+1)^2 + 1 - 4 = (x+1)^2 - 3$ 。故本题选 D。

2. 把函数 $y = 2x^2$ 的图象先向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度得到新函数的图象, 则新函数的表达式为 ()

A. $y = 2(x-3)^2 + 2$

B. $y = 2(x+3)^2 - 2$

C. $y = 2(x+3)^2 + 2$

D. $y = 2(x-3)^2 - 2$

【答案】选 D。

【解析】根据“左加右减, 上加下减”, 函数 $y = 2x^2$ 向右平移 3 个单位长度得到 $y = 2(x-3)^2$, 再向下平移两个单位长度, 得到函数解析式为 $y = 2(x-3)^2 - 2$ 。故本题选 D。