# 巧解函数的值域

华图教师通过对历年各省市教师招聘笔试真题的分析，函数是一块非常重要的内容，在历次考试中均是考察的重点。题型为全题型，即选择题、填空题、判断题、解答题均会出现。众所周知，定义域、值域、解析式构成了函数的三要素，尤其是对函数值域的考察，要求考生具备较强的综合能力。你是否还能想起，它们变化多端的样式曾让人抓耳挠腮，因此我们结合招教考试的命题规律，对求值域的方法作如下总结：

**一、定义法**

设函数的定义域为 $x$ 的取值范围，则函数的值域为函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$。

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $I$，如果存在实数 $M$ 满足：对于任意 $x\in I$，都有 $f(x)\le M$，存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$，则 $M$ 为最大值；而如果存在实数 $N$ 满足：对于任意 $x\in I$，都有 $f(x)\ge N$，存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=N$，则 $N$ 为最小值。函数的值域为 $[N，M]$。

**二、单调性法**

先确定函数在给定区间上的单调性，然后依据单调性求函数的值域，这是确定函数值域最常用的方法。

【例题】

函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$。

【答案】4 或 $\frac{1}{4}$。

【解析】当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 是单调递减的，所以 $f(a)-f(2a)=\log_a a-\log_a 2a=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{4}$；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 是单调递增的，所以 $f(2a)-f(a)=\log_a 2a-\log_a a=\frac{1}{2}$，解得 $a=4$。

**三、换元法**

换元法有两类：代数换元和三角换元。

【例题】

1.求函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域（代数换元）。

【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

【解析】令 $t=\sqrt{1-2x}\ge 0$，则 $x=\frac{1-t^2}{2}$，所以 $y=\frac{1-t^2}{2}-t=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1$，当 $t=0$ 时，

$y_{max}=\frac{1}{2}$，所以原函数的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

2.求函数$y=x+2+\sqrt{1-(x+1)^2}$的值域（三角换元）。

【答案】$\left[0,\sqrt{2}+1\right]$。

【解析】令$x+1=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$，所以$y=\sin t+1+\sqrt{1-\sin^2 t}=\sin t+\cos t+1=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+1$，因为$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\le1$，$0\le y\le\sqrt{2}+1$，所以原函数的值域为$\left[0,\sqrt{2}+1\right]$。

**四、配方法**

配方法是求二次函数最值的基本方法，如$F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$。

【例题】

求值域$y=2x^2+x$。

【答案】$\left[-\frac{1}{8},+\infty\right)$。

【解析】因为$y=2x^2+x=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$，所以$y\ge-\frac{1}{8}$。

**五、分离常数法**

在含有两个量（一个常量和一个变量）的关系式（不等式或方程）中，要求变量的取值范围，可以将变量和常量分离（即变量和常量各在式子的一端），从而求出变量的取值范围。

【例题】求函数$y=\frac{2x+2}{x-3}$的值域。

【解析】$y=\frac{2x+2}{x-3}=\frac{2x-6+8}{x-3}=2+\frac{8}{x-3}$，因为$y$的定义域为$\{x|x\ne3\}$，因此$y$的值域为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$。

**六、均值不等式法**

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\,(a>0,\ b>0)$

【例题】

求$y=3x+\frac{12}{x}$的值域。

函数的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，当$x>0$时，$3x+\frac{12}{x}\geq 2\sqrt{3x\cdot\frac{12}{x}}=12$（当且仅当$3x=\frac{12}{x}$时，等号成立）；当$x<0$时，$-3x+\frac{12}{(-x)}\geq 2\sqrt{-3x\cdot\frac{12}{(-x)}}=12$，即$3x+\frac{12}{x}\leq -12$（当且仅当$-3x=\frac{12}{-x}$时，等号成立）；所以$y$的值域为$(-\infty,-12]\cup[12,+\infty)$。

最后提醒大家在遇到求解函数值域的问题时，不要盲目去求解，首先要分析函数表达式，根据函数类型选择合适的方法，起到事半功倍的效果。